650. Pseudo regular function ニ關スル二三ノ注意

高木　尚文（東北大）

1. 角谷氏ノ Jap. Journ. of Math., vol. XIII, PP. 376−392 ニ於テ定義セラレタ Pseudo regular function ニツイテ, Picard ノ定理ノ拡張デアル Lindelöf ノ定理及ビ Maximum Principle ノ定理ヲ同様ナ條件ノ下ニ成立スルコトヲ述ベル。

ソノ証明ニハ gross ノ theorem ノ証明法ヲ用ヒル。

$z=x+iy$ ノ一意連続函数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ガ次ノ三條件ヲ満足スルトキ D 内デ Pseudo regular function[1] デアルトイフ。

---

1) 簡單ノタメニ Pseudo regular ヲ P.r. トカク。又 Pseudo meromorphic ヲ P.m. トカクコトニスル。

1° u_x, u_y, v_x, v_y ガ存在シテ、Dニ於イテ連続デアル。

2° D内ニ集積点ヲ有シナイ可附番集合ヲ除イテハ

$$J(x,y) \equiv \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} > 0$$

3° $J(x,y)=0$ ナル点 z_0 ニ於テハ z_0 ノ充分小ナル近傍ガ唯 $w_0=f(z_0)$ ニ於テ $(n-1)$ 次ノ代数分岐点ヲ有スル Riemann surface ヘ topologically ニ map セラレル。

コレラノ條件ノ中 3° ハ 1°, 2° ヨリ導キ出セルコトハ S. Stoïbow ノ Annales de l'Institute Poincaré 2 (1932) 及ビ C. R. 200 (1935) ニ出テヲル論文ニヨッテ解ルシ、直接証明スルコトモ出來ル。故ニ條件トシテハ 1°, 2° ガアレバ充分デス。

角谷氏ノ前述ノ論文デ定義セラレタ記号ヲソノママ用ヒルコトニシマス。

即チ $E=u_x^2+v_x^2$, $F=u_xu_y+v_xv_y$, $G=u_y^2+v_y^2$

$$P_f(z) \equiv P(z) \equiv P(x,y) = \frac{E+G}{J} \equiv \frac{E+G}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$P(x,y) = q(x,y) + \frac{1}{q(x,y)}$$

トオクトキ

(1) $qJ \geqq G \geqq \dfrac{J}{q}$

ガ成立スルコトガ証明セラレテヰル。

更ニコレデハ前記論文中ノ定理1及ビ2ヲ定理A, 定理5ヲ定理Bトシテ参照スルコトニシマス。

2. $w=f(z)$ガzー平面ノ連結領域Tノ内部及ビ境界デP. m. f. ナリトスル. 然シ境界上ノ一点デハPoleデナイ特異点ヲモツモノトスル。コノ点ヲ$z=0$トスル。

更ニ次ノ様ナ有限ノ値$w=\omega$, $r>0$及ビ領域T'ガアルトスル、乃チ

$1°$ T'ハTノ内部ニアル。

$2°$ T'ノ境界上デハ$|f(z)-\omega|\geqq r$.

$3°$ T'ノ内部ニ$|f(z)-\omega|<r$トナルヤウナ点zガ少クトモ一ツ存在スル。

然ルトキT'ノ内部ニ次ノ如キzヲ含ム連結領域$\Delta_\omega(r)$ガキメラレル. 乃チ

1^* $f(z)$ハ$z=0$ヲ除ク$\Delta_\omega(r)$ノ境界上ノ点及ビソノ内部デP. r. デアル。

2^* $\Delta_\omega(r)$ノ$z=0$ヲ除ク境界上ノ点デハ

$$|f(z)-\omega|=r$$

3^* $\Delta_\omega(r)$ノ内部デハ $|f(z)-\omega|<r$

$w=f(z)$ノ逆函数ヲ$z=\varphi(w)$トスレバ, $\Delta_\omega(r)$ノ内点及ビ$z=0$以外ノ境界点ニハ$z=\varphi(w)$ノP. r. ナ点モシクハ代数分岐点ガ対應スル。

zー平面上ノ$\Delta_\omega(r)$ノ$w=f(z)$ニヨルRiemann surface R_rヲ作ルト, $J(f)=0$ナル点ニ於テハ代数分岐点ガ對應シテアリ且ツ逆モ成立スル, 又R_rハソノ境

界上ニ一般ニハ transcendental point ヲ含ム。

コノ transcendental point ハ次ノヤウニ定義セラレル。R_r ノ点 w' ニ近ヅク $|w-\omega|\leqq r$ カラ出ナイ道 G ガアッテ，G ノ点ハ w' ヲ除イテハ R_r ノ内点デ且ツ w ガ G ニ沿ッテ w' ニ近ヅクトキ對應スル z ガ 0 ニ近ヅクトキ w' ヲ R_r ノ transcendental point ト名ヅケル。

モシ zー平面上ニ $\Delta_\omega(r)$ カラ出ナイ $z=0$ ニ近ヅク道 Γ ガアリソノ上デ $f(z)$ ガアル limit value w' ニ近ヅクナラバ，点 w' ハ R_r ノ transcendental point デアル。

3. Iversen ノ次ノ論文

F. Iversen, Sur quelques propriétés des fonctions monogènes au voisinage d'un point singulier, Öfvers. of Finska Soc., t. 58,

ニ於テイロイロノ結果ヲ出スノニ次ノ定理ガ重要ナ役割ヲ演ジテヰル。

モシ $\Delta_\omega(r)$ ノ内部ニ $f(z)=\omega$ ヲ満足スル点ガナイナラバ，コノ領域ハ原点ヲ境界点トシテモチ，ソノ内部ニ ω ノ收斂路ヲ含ム。

故ニコレニ對應スル定理ヲ証明スレバヨイコトニナル。

Γ 内ニアリ且ツ $|z|=r$ ナル z ニ関シテノ $P_f(z)$, $q_f(z)$ ノ maximum ヲ $P(r)$, $q(r)$ トカク。

定理1. $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon \frac{dr}{rp(z)}$ （又ハ $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon \frac{dr}{rq(r)}$）が発散スル

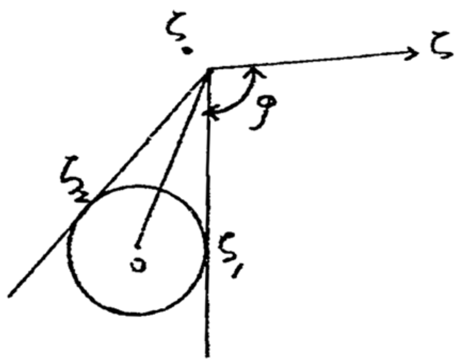
トスル。

モシ $\Delta_\omega(\rho)$ ノ内部ニ $f(z)=\omega$ ヲ満足スル点ガナイナラバ，コノ領域ハ原点マデノビテ居テ，ω ノ收斂路ヲ含ム。

証明： $\zeta=\dfrac{1}{f(z)-\omega}$ トオクトキ，Aカラ $p_\zeta(z)=p_f(z)$,

$$q_\zeta(z)=q_f(z).$$

$\Delta_\omega(\rho)$ 内デハ $|\zeta|>\frac{1}{\rho}$ デ，$\Delta_\omega(\rho)$ ノ境界上デハ $|\zeta|=\frac{1}{\rho}$



今 $\Delta_\omega(\rho)$ 内ニ任意ノ一点 z_0（$J(f)\neq 0$）ニ対シテ ζ ノリーまん面 $\overline{R}_\rho$ ノ一点 ζ_0 が定マリ且 $|\zeta_0|>\frac{1}{\rho}$.

ζ_0 カラ円 $|\zeta|=\frac{1}{\rho}$ へ切線 $\zeta_0\zeta_1$, $\zeta_0\zeta_2$ ヲ引ク．ζ_0 カラ円 0 ニ交ハラナイ *ray* ヲ引クトキ高々 *null set* ニ属スル φ ヲ除イテハ

$$arg.\frac{\zeta-\zeta_0}{\zeta_1-\zeta_0}=\varphi$$

ナル直線上ニハ ∞ マデ内点ダケデ代数分岐点モ *transcendental point* モ存在シナイコトヲ証明スル。

然ルニ $s=\log z=\sigma+i\tau$ トシ，$\zeta(z(s))=\zeta_1(s)=u+iv$ トオクト，Aカラ $p(z)=p(s)$, $q(z)=q(s)$ デアル。

ζ_0 カラ出ル ray ガ transc. pt. 又ハ代数分岐点ニ出會フトキハ，ソレカラサキヲキリトリ、然ラザルトキハ ζ_0 カラ ∞ マデノ ray ヲトル。カヽル ray ノ部分デ覆ハレル $\overline{R}_\varphi$ ノ部分ヲ S トスル。

有限ノ長サノ ray ニ対應スル φ ガ null set ヲ作ルコトヲ示セバヨイ。有限ノ長サノ ray ノ ζ_0 トハ異ナル端点ガ代数分岐点ニナルモノハ可附番個シカ存在シナイカラ，カヽル端点ガ transc. pt. ニナル場合ヲ考ヘレバヨイ。カヽル端点ノ集合ヲ M トス。更ニ $|\zeta-\zeta_0|\leqq R$ 内ニアルカヽル M ノ部分 M_R ヲ考ヘレバヨイ。何トナレバ，対應スル φ ノ集合ガ null set ナラバ，M_{R_n} $(R_1<R_2<\cdots\cdots;\ R_n\to\infty)$ ノ和集合モ亦 null set ニナルカラデアル。

今 S_ζ ヲ $|\zeta-\zeta_0|\leqq R$ ト S トノ共通部分トスル。S_ζ ノ内部ハ $s(\zeta)$ ニヨリ schlicht ナ domain S_s ニ pseudo conformally ニ一對一ニ map サレル。コノ際 S_s ハ $-\infty$ ヲ外点カ境界点ニモツ。

任意ニ $r>0$ ヲトリ s－平面デ $R(s)=\log r$ ノ上ノ S_s ノ内部ニ属スル可附番ケノ線分ノ全体ヲ $Q_s(r)$ トスル。

$Q_s(r)$ ハ S_s 内デ境界点 $s=-\infty$ ト $s=\log s(\zeta_0)$ トヲ相分ツ。故ニ $Q_s(r)$ ノ寫像 $Q_\zeta(r)$ ハ S_ζ 内デ $\zeta=\zeta_0$ ヲスベテノ M_R ノ点カラ分ツ。コレカラシテ對應スル φ 集合ノ測度 $m(\varphi)$ ハ $Q_\zeta(r)$ ノ各弧ノ開キノ和ヨリ大ナラズ。$Q_\zeta(r)$ ノ各弧ノ開キハ高々弧ノ長サヲ ζ_0 カラ $Q_\zeta(r)$ マ

デノ最短距離δ_rデワッタモノニ等シイ。然ルニrヲ或ル定ッタ$r_0\,(>0)$ヨリ小ニトレバ，δ_rハr_0ニノミdependスル$\delta_0\,(>0)$ヨリ常ニ大ナリ。従ッテ$Q_S(r)$ノ各弧ノ長サノ和$S(r)$ガ$r\,(0<r\leqq r_0)$ハ適當ナエラビ方ニヨリ任意ニ小ニサレ得ルコトヲ云ヘバヨイ。

$$\left(S(\sigma)\right)^2=\left(\int_{Q_S(r)}|u_\tau+iv_\tau|\,d\tau\right)^2\leqq 2\pi\int_{Q_S(r)} q(\sigma,\tau)J(\sigma,\tau)\,d\tau$$

(by (1))

$$\leqq 2\pi\,\underset{Q_S(r)}{\mathrm{Max}}\;q(\sigma,\tau)\int_{Q_S(r)}J(\sigma,\tau)\,d\tau.$$

$$q(\sigma)=\underset{Q_S(r)}{\mathrm{Max}}\;q(\sigma,\tau)$$

$$\int_{\log r}^{\log r_0}\frac{S(\sigma)^2}{q(\sigma)}\,d\sigma\leqq 2\pi\int_{\log r}^{\log r_0}\int_{Q_S(r)}J(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau\leqq 2\pi^2R^2,$$

$$\lim_{r\to 0}\int_r^{r_0}\frac{S(r)^2}{r\,q(r)}\,dr\leqq 2\pi^2R^2$$

今εヲ任意ニ小ナル正數トスレバ，少クトモ一ツノ値rニ對シテ$S(r)<\varepsilon$ナリ。

然ラザルモノトスレバ，

$$\int_r^{r_0}\frac{S_1^2(r)\,dr}{r\,q(r)}\geqq\varepsilon^2\int_r^{r_0}\frac{dr}{r\,q(r)}\to\infty,\quad\text{as}\quad r\to 0$$

コレハ矛盾デアル。乃チζ_0カラ∞マデ$\overline{R}_\rho$内ニアル直線ガアルコトニナル。ヨッテ定理1ハ証明セラレタ。

コレカラ次ノ定理ヲ得ル。

定理2. $w=f(z)$ガ孤立眞性特異点$z=0$ノ近傍デ

$p.m.f.$ 且ツ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}\frac{dr}{rp(r)} \quad \left(又ハ\ \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}\frac{dr}{rq(r)}\right)$$

ガ発散スルトスル。

モシ $w=\omega$ ヲ $z=0$ ノ近傍デトラナイナラバ，$f(z)$ ガソノ上デ ω ニ近ヅク如キ收斂路ガ存在スル。

証明： ω ヲ有限トシテモヨイ。zー平面上ニ原点ヲ中心トスル充分小ナル円 C ヲ画キソノ内部デ原点ヲ除イテ及ビソノ周上デ $f(z)$ ハ $P.m.$ デアルヤウニ出来ル。C 上デ $|f(z)-\omega|$ ハ minimum $r(>0)$ ヲ有ツ。一方角谷氏ノ定理 B ニヨリ C ノ内部ニ $|f(z)-\omega|<r$ ナル点ガ存在スル，故ニ (C) ヲ満足スル $\Delta_{\omega}(r)$ ガ C 内ニ存在シ $f(z)=\omega$ ノ根ハソノ内部ニ存在シナイカラ定理 1 ニヨリコノ $\Delta_{\omega}(r)$ ハ原点ニ近ヅク ω 收斂路ヲ含ム。

又定理 1 ノ証明カラ容易ニ解ル次ノ *Lindelöf's theorem* ノ拡張ガ得ラレル。

定理 3. 函数 $f(z)$ ガ或領域 T ノ内部デ $P.m.f.$ デ，ソノ境界上ノ高々有限箇ノ点 $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n$ ヲ除イテハ各点ニ対シテ任意ノ $\varepsilon(>0)$ ニ対シテソノ近傍 U ガ $U\cdot T$ ノ内部ニ属スルスベテノ z ニ對シテ常ニ

$$|f(z)|<M+\varepsilon$$

ガ成立スル如ク定メラレ且ツ除外点ニ対シテハ $|z-z_i|=r_i$ $(i=1,\cdots\cdots,n)$ トカクト

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}\frac{dr_i}{r_i\,p(r_i)}\left(\text{又ハ}\ \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}\frac{dr_i}{r_i\,q(r_i)}\right)\quad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ガ発散スルトスル。

然ルトキハ、コノ領域 Π 内デ $|f(z)|<M$ ナルカ，サウデナケレバ有界ニハナリ得ナイ。

4. Iversen ノ前記ノ論文デ重要ナ役目ヲツトメテヰル前記ノ定理ノ代ハリニ定理1ヲ用ヒテ Iversen ノ証明ヲソノマヽ辿ッテユケバ，$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}\frac{dr}{r\,p(r)}$ ガ発散スルトイフ條件ノ下ニ，$f(z)$ ガ両端ガ原点ニ近ヅイテヰル、単一じよるだん曲線ニヨリカコマレタ領域ノ内部及ビ原点ヲ除ク境界上デ p. m. f. トスル、モシソノ境界ニ沿ウテ原点ニ近ヅクトキ $f(z)$ ガ一定ノ極限値ヲ有スルトキハ $f(z)$ ハソノ領域内デ原点ニ近ヅクトキ一様ニ同ジ値ニ近ヅクカ、然ラザレバ，$f(z)$ ハ與ヘラレタ任意ノ値ニイクラデモ近ヅキ得ルトイフコトガ結論サレル。

コノコトガ証明サレルト，何時モヤル方法、三ツノ値ヲトラナイ modular function $m(w)$ ヲ用ヒテ，$Z=m(f(z))$ ニツイテ考ヘル．Z ハ又 p. r. f. デ Z ト f トハ同一ノ p. q ヲモチ、尚コレガ一意函数ナルコトハ Monodromie Satz (Kerékjartó 175頁) ニヨッテ明カデアル。

次ニソノ結果ノ二三ヲ定理ノ形デ述ベテオキマス。

定理3. 両端ガ原点ヘ近ヅク単一じよるだん曲線ニヨッテカコマレタ領域ノ内部又ハソノ曲線上デ原点ヲ除イテ

$f(z)$ ガ p. m. f. デアルトシ且ツ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}\frac{dr}{rq(r)} \quad \left(\text{又ハ } \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}\frac{dr}{rp(r)}\right)\to\infty$$

ナラバ，$f(z)$ ガソノ Jordan curve ニ沿フテ両方カラ原点ニ近ヅクトキ同一ノ極限値 a ヲモツナラバ $f(z)$ ハソノ領域内デ原点ニ近ヅクトキ一様ニ a ニ近ヅクカ或ハ與ヘラレタル任意ノ値ノ中高々ニツヲ除イテ ∞ 回ソノ領域内デソレラノ値ヲトル。

定理4. 定理3デ述ベタヤウナ條件ノ下デ $f(z)$ ガソノ Jordan curve ニ沿フテ両方カラ原点ヘ近ヅイタトキノ極限値ガ異ナルトキハ，$f(z)$ ハソノ領域内デ高々ニツノ値ヲ除イテスベテノ値ヲ無限回トル。